

❖ **Câu 1 (3,5đ):**

Cho một hệ kỹ thuật có mô tả toán học là một phương trình vi phân bậc 2 có dạng:

$$y'' + 6y' + 8y = r(t) \quad (1)$$

trong đó  $r(t)$  là tín hiệu bên ngoài đưa vào hệ thống và có dạng hàm:

$$r(t) = e^{-3t} - e^{-5t} \quad (2)$$

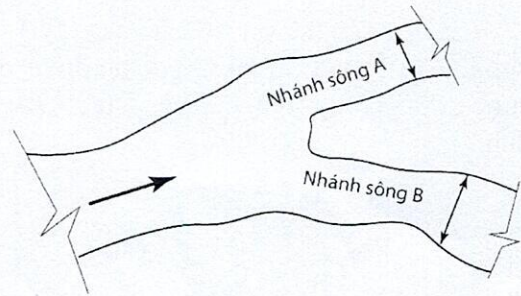
Giả thiết các thông số ban đầu của hệ này là  $y(0) = 0$  và  $y'(0) = 0$ .

Giải tìm đáp ứng  $y(t)$  của hệ trên bằng phương pháp Laplace.

❖ **Câu 2 (3,0đ):**

Một nhóm kỹ sư đang thực hiện khảo sát cho dự án xây 1 cây cầu bắc qua sông. Có 2 vị trí đoàn khảo sát đang đề xuất qua nhánh sông A hoặc nhánh sông B như tại Hình 1. Tiêu chí chọn vị trí làm cầu là nơi có lưu lượng nước chảy ít. Dùng thiết bị đo vận tốc dòng chảy, người ta tính được vận tốc trung bình của nước trên từng nhánh sông là:

$$V_A = 0.8 \text{ (m/s)} \text{ và } V_B = 0.72 \text{ (m/s)}.$$



Hình 1.

Để biết lưu lượng nước, cần phải xác định diện tích mặt cắt từng nhánh sông tại các vị trí khảo sát. Kết quả đo chiều sâu lòng sông tại 2 nhánh A và B được tổng hợp tại Bảng 1 và Bảng 2. Hãy xác định:

- Sử dụng các phương pháp tích phân số (hình thang, Simpson 1/3 và Simpson 3/8) một cách hợp lý để tính chính xác nhất diện tích mặt cắt từng nhánh sông. (2,0đ).
- Tính lưu lượng nước chảy ( $m^3/s$ ) tại từng nhánh và đề xuất vị trí xây cầu. (1,0đ).

❖ **Chú thích:**

- Giả thiết vận tốc dòng chảy trên các nhánh sông là như nhau tại mọi điểm và bằng vận tốc trung bình đã xác định, lưu lượng nước chảy có thể tính bằng công thức (3):

$$Q = V \cdot A \text{ (m}^3\text{/s)} \quad (3)$$

trong đó:  $A = \int_0^x h(x)dx$  là diện tích mặt cắt lòng sông.

**Bảng 1:** Chiều sâu lòng sông nhánh A

Vị trí đo $x(m)$	0	1	1.5	2	2.5	3	5	6	7	8
Chiều sâu $h(m)$	0.2	1.3	1.3	1.3	1.4	1.6	3.3	3.5	2.4	0.2

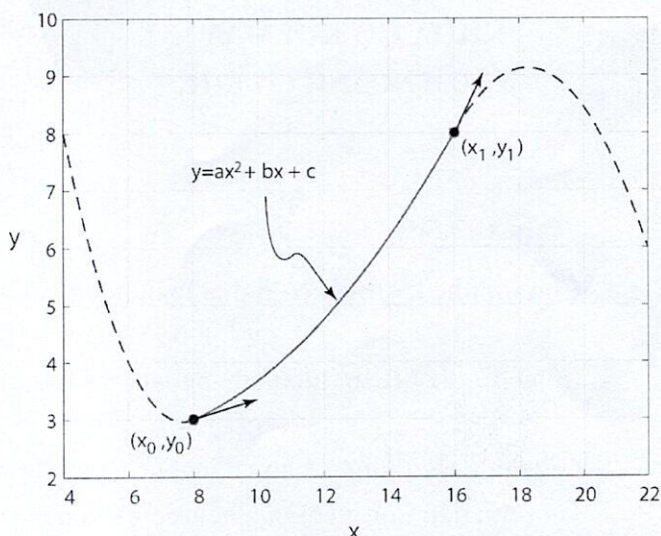
**Bảng 2:** Chiều sâu lòng sông nhánh B

Vị trí đo $x(m)$	0	2	4	6	7.5	9	10
Chiều sâu $h(m)$	0.2	2.4	2.1	1.6	2.3	2.7	0.2

❖ **Câu 3 (3,5đ):**

Đường cong Spline là một dạng đường cong nội suy được sử dụng rất phổ biến trong các phần mềm đồ họa. Nội suy Spline giúp duy trì một hàm đa thức bậc thấp giữa 2 điểm dữ liệu trong khi vẫn đảm bảo tính liên tục giữa các đoạn cong khi vẽ bằng các phần mềm. Hình 2 biểu diễn cách một đường cong Spline bậc 2 có dạng:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$   
 được nội suy giữa 2 điểm  $(x_0, y_0)$  và  $(x_1, y_1)$ .



Hình 2. Đường cong nội suy Spline

Cho 2 điểm  $(x_0, y_0) = (8, 3)$  và  $(x_1, y_1) = (16, 8)$  là các điểm đầu và điểm cuối của đường cong Spline bậc 2 cần tìm; **hệ số góc** tại điểm cuối của đường cong trước đó là  $y'(x_0) = 0.25$ . Để vẽ được đường cong trên, các hệ số  $(a, b, c)$  phải được xác định thông qua giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ y'(x_0) = 0.25 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ 2ax_0 + b = 0.25 \end{cases} \quad (4)$$

- Biểu diễn lại hệ phương trình (4) dưới dạng ma trận số  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ . (0,5đ)
- Tính **định thức** của ma trận  $\mathbf{A}$  (1,0đ).
- Tìm **ma trận nghịch đảo**  $(\mathbf{A}^{-1})$  (1,0đ)
- Giải tìm hệ số  $(a, b, c)$  của hệ phương trình đã cho bằng phương pháp ma trận nghịch đảo (0,5đ).
- Tìm hệ số góc của đường cong này tại điểm cuối  $(x_1, y_1)$ . (0,5đ).

HẾT.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR 1.2]: Nắm vững phương pháp biến đổi Laplace thuận nghịch để giải phương trình vi phân, vi tích phân.	Câu 1
[CĐR 1.3]: Vận dụng các kiến thức toán để tính toán, phân tích và kiểm nghiệm kết quả bài toán kỹ thuật cơ khí, cơ điện tử.	Câu 2
[CĐR 4.4]: Giải bài toán tìm định thức, ma trận nghịch đảo từ các yêu cầu của bài toán kỹ thuật đặt ra.	Câu 3

Ngày 12 tháng 01 năm 2021

Thông qua Bộ môn

*(Signature)*  
 Vũ Quang Huy

## ĐÁP ÁN ĐỀ THI HK1 NĂM HỌC 2020-2021

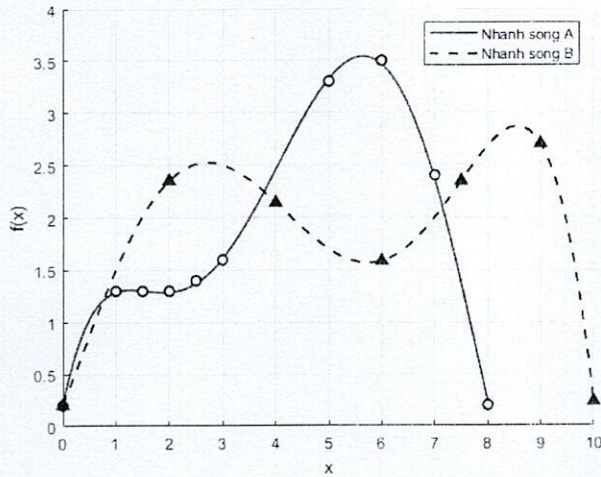
MÔN TOÁN ỨNG DỤNG (AMME131529) (Hệ đại trà)

❖ **Câu 1: (3,5điểm)**

$$y'' = 6y' + 8y = e^{-3t} - e^{-5t}, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(s^2Y - y(0)s - y'(0)) + 6(sY - y(0)) + 8Y = \frac{1}{s - (-3)} - \frac{1}{s - (-5)}</math></li> <li>• <math>(s^2 + 6s + 8)Y = \frac{1}{s + 3} - \frac{1}{s + 5}</math></li> </ul>	0,5đ
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)(s + 5)}</math></li> </ul>	0,5đ
<p>Tách phân số:</p> $\frac{1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)(s + 5)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{s + 4} + \frac{D}{s + 5}$	0,5đ
$Y = 2 \cdot \left[ \frac{\frac{1}{6}}{s + 2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s + 3} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 4} + \frac{-\frac{1}{6}}{s + 5} \right]$ $= \frac{\frac{1}{3}}{s + 2} + \frac{-1}{s + 3} + \frac{1}{s + 4} + \frac{-\frac{1}{3}}{s + 5}$	1,0đ
$y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} - e^{-3t} + e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$	1,0đ

❖ **Câu 2: (3,0đ)**



Hình. Tham khảo hình dáng lòng sông

❖ **Câu (a)**

**Bảng 1:** Chiều sâu lòng sông nhánh A

$x(m)$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
		0	1	1.5	2	2.5	3	5	6	7
$h(m)$	0.2	1.3	1.3	1.3	1.4	1.6	3.3	3.5	2.4	0.2
PP	Trapezoidal (1)					Trapezoidal (2)				
			Simpson 1/3 (2 lần)				Simpson 3/8			

Tính diện tích mặt cắt nhánh A

(1,0đ)

Áp dụng Trapezoidal cho đoạn  $(x_0 - x_1)$

$$S_{\text{trap1}} = 0.750$$

Áp dụng Simpson 1/3 (2 lần) cho đoạn  $(x_1 - x_5)$

$$S_{\text{simp1/3}} = 2.717$$

Áp dụng Trapezoidal cho đoạn  $(x_5 - x_6)$

$$S_{\text{trap2}} = 4.900$$

Áp dụng Simpson 3/8 cho đoạn  $(x_6 - x_9)$

$$S_{\text{simp3/8}} = 7.950$$

$$\underline{\text{SUM-A}} \quad \underline{\underline{16.317 \text{ (m}^2\text{)}}}$$

**Bảng 2:** Chiều sâu lòng sông nhánh B

$x(m)$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	0	2	4	6	7.5	9	10
$h(m)$	0.2	2.4	2.1	1.6	2.3	2.7	0.2
PP	Simpson 3/8					Trapezoidal	
				Simpson 1/3			

Tính diện tích mặt cắt nhánh B

(1,0đ)

Áp dụng Simpson 3/8 cho đoạn  $(x_0 - x_3)$

$$S_{\text{simp}3/8} = 11.475$$

Áp dụng Simpson 1/3 cho đoạn  $(x_3 - x_5)$

$$S_{\text{simp}1/3} = 6.750$$

Áp dụng Trapezoidal cho đoạn  $(x_5 - x_6)$

$$S_{\text{trap}} = 1.450$$

$$\text{SUM-B} \quad \underline{\underline{19.675 \text{ (m}^2\text{)}}}$$

- **Câu (b)**

(1,0đ)

Lưu lượng nhánh A:

$$Q_A = S_A \cdot V_A = 16.317 \cdot 0.8 = \underline{\underline{13.054 \text{ (m}^3\text{/s)}}}$$

Lưu lượng nhánh B:

$$Q_B = S_B \cdot V_B = 19.675 \cdot 0.72 = \underline{\underline{14.166 \text{ (m}^3\text{/s)}}}$$

- **Kết luận:** với tiêu chí chọn nhánh sông có lưu lượng nước chảy ít, cây cầu nên được xây bắc qua nhánh sông A.

❖ **Câu 3: (3,5đ)**

Xây dựng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8^2a + 8b + c = 3 \\ 16^2a + 16b + c = 8 \\ 16a + b = 0.25 \end{cases}$$

a) Biểu diễn dạng ma trận:  $AX=B$  (0,5đ)

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \\ 16 & 1 & 0 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

b) Tính  $\det(A)$ : (1,0đ)

- $\det(A) = 64$
- *SV phải trình bày được cách tìm ra kết quả này mới được tính điểm.*

c) Tính  $A^{-1}$ : (1,0đ)

- $A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0156 & 0.0156 & -0.1250 \\ 0.25 & -0.25 & 3 \\ 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- *SV phải trình bày được cách tìm ra kết quả này mới được tính điểm.*

d) Giải tìm nghiệm:  $X=A^{-1}.B$  (0,5đ)

- $X = \begin{bmatrix} 0.0469 \\ -0.5 \\ 4 \end{bmatrix}$
- $y = f(x) = 0.0469x^2 - 0.5x + 4$

e) Hệ số góc của đường cong tại điểm  $(x_1, y_1)$ . (0,5đ)

- $y'(x_1) = 2ax_1 + b = 1.0008$

HẾT